marxer engineering & computing

www.mec.li

Mathematik mit *Mathematica*

Inhaltsangabe und Links

Analysis

Algebra

Statistik

Allgemein

Analysis

Leite die Funktion `Sin[x] x`^{3} nach x ab.

$\partial_x (\mathrm{Sin}[x]\, x^3)$

$x^3\, \mathrm{Cos}[x] + 3\, x^2\, \mathrm{Sin}[x]$

Wie lautet die Kettenregel

$\partial_x f[g[x]]$

$f'[g[x]]\, g'[x]$

Wie lautet die Produktregel

$\partial_x (f[x]\, g[x])$

$g[x]\, f'[x] + f[x]\, g'[x]$

Integriere $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\,\text{Log}[-1+x]-\frac{1}{2}\,\text{Log}[1+x]$$

Integriere $\int \frac{1}{1+a\,x^2}\,dx$

$$\int \frac{1}{1+a\,x^2}\,dx$$

$$\frac{\text{ArcTan}\left[\sqrt{a}\,x\right]}{\sqrt{a}}$$

Integriere e^{-x} von 0 bis ∞ für die Bereiche wo Sin[x] grösser als $\frac{1}{2}$ ist.

$$\int_0^\infty \text{Boole}\left[\text{Sin}[x]>\frac{1}{2}\right]e^{-x}\,dx$$

$$\frac{e^{7\pi/6}}{1+e^{2\pi/3}+e^{4\pi/3}}$$

Löse die Differentialgleichung `y'[x] == a y[x]` mit der Anfangsbedingung y[0]==10

```
y[x] /. DSolve[{y'[x] == a y[x], y[0] == 10}, y[x], x]
```

$$\{10\,e^{a\,x}\}$$

Löse die inhomogene Differentialgleichung `y'[x] - x y[x] == 1`

```
y[x] /. DSolve[y'[x] - x y[x] == 1, y[x], x]
```

$$\left\{e^{\frac{x^2}{2}}\,C[1]+e^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\text{Erf}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right]\right\}$$

`Note: Erf[z]` is the integral of the Gaussian distribution, given by $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt$.

Gib eine explizite Formel für die Terme der geometrischen Folge mit dem Faktor p und dem Startwert 1 an. Wie gross sind die ersten 10 Terme für $p = \frac{1}{2}$. Konvergiert die Folge?

```
Clear[a, p, n, sol];
a[n_] = a[n] /. First[ RSolve[{a[n] == p a[n - 1], a[1] == 1}, a[n], n]]
```

p^{-1+n}

```
p = 1/2; Table[a[n], {n, 10}]
```

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}\right\}$

```
Limit[a[n], n → ∞]
```

0

Gib eine explizite Formel für die Terme der arithmetischen Folge mit der Differenz d und dem Startwert 10 an. Wie gross sind die ersten 10 Terme für $d = 5$. Konvergiert die Folge?

```
Clear[a, p, n, sol];
a[n_] = Simplify[a[n] /. First[ RSolve[{a[n] == d + a[n - 1], a[1] == 10}, a[n], n]]]
```

10 + d (-1 + n)

```
d = 5; Table[a[n], {n, 10}]
```

{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55}

```
Limit[a[n], n → ∞]
```

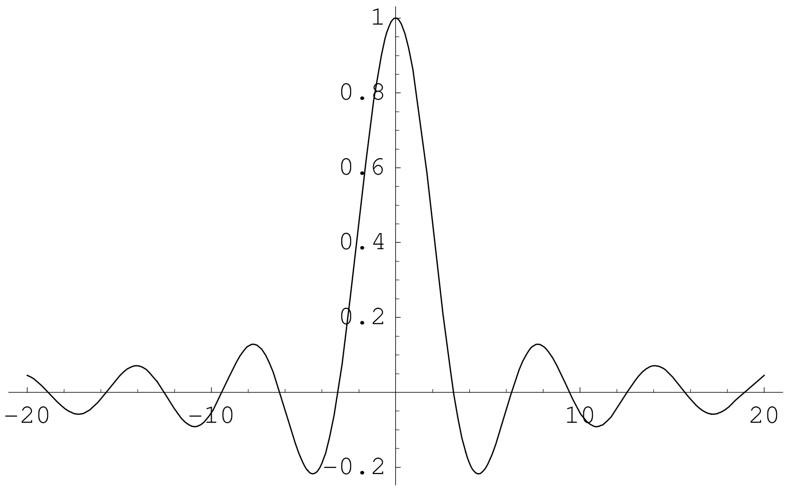
∞

Gegen welchen Wert konvergiert $\frac{\mathrm{Sin}[x]}{x}$, wenn x gegen 0 geht? Plotte die Funktion in diesem Bereich.

```
Limit[Sin[x]/x, x → 0]
```

1

```
Plot[Sin[x]/x, {x, -20, 20}, PlotRange → All];
```



Welche Schritte sind notwendig, um das Maximum der Funktion $f[x] := -5\,x^3 + 40\,x^2 - 8$ zu bestimmen?

Zuerst werden die Nullstellen der Ableitung der Funktion berechnet.

```
f[x_] := -5 x^3 + 40 x^2 - 8;
sol = Solve[f'[x] == 0, x]
```

$$\left\{\{x \to 0\}, \left\{x \to \frac{16}{3}\right\}\right\}$$

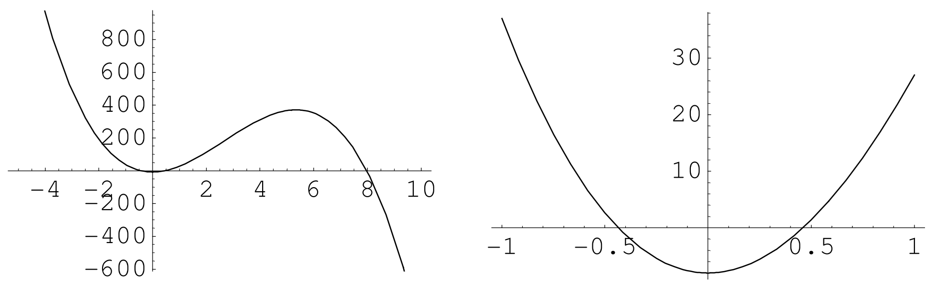
Die Lösung, bei der die zweite Ableitung kleiner als 0 ist, ist das Maximum.

```
{x, f[x], f'[x], f''[x]} /. sol
```

$$\left\{\{0, -8, 0, 80\}, \left\{\frac{16}{3}, \frac{10024}{27}, 0, -80\right\}\right\}$$

Zur Illustration

```
Show[GraphicsArray[{
    Plot[f[x], {x, -5, 10}, DisplayFunction → Identity],
    Plot[f[x], {x, -1, 1}, DisplayFunction → Identity]
  }], DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



Bestimme die Nullstellen, Extremalwerte sowie die Wendepunkte der Funktion
$f[x] = x^3 - 6x^2 + 5$.

```
f[x_] := x^3 - 6 x^2 + 5;
(nst = x /. Solve[f[x] == 0, x]; nst = Map[{#, f[#]} &, nst]) // ColumnForm
```

$\{1, 0\}$

$\left\{\frac{1}{2}\left(5-3\sqrt{5}\right), 5-\frac{3}{2}\left(5-3\sqrt{5}\right)^2+\frac{1}{8}\left(5-3\sqrt{5}\right)^3\right\}$

$\left\{\frac{1}{2}\left(5+3\sqrt{5}\right), 5-\frac{3}{2}\left(5+3\sqrt{5}\right)^2+\frac{1}{8}\left(5+3\sqrt{5}\right)^3\right\}$

```
(ext = x /. Solve[f'[x] == 0, x]; ext = Map[{#, f[#]} &, ext]) // ColumnForm
```

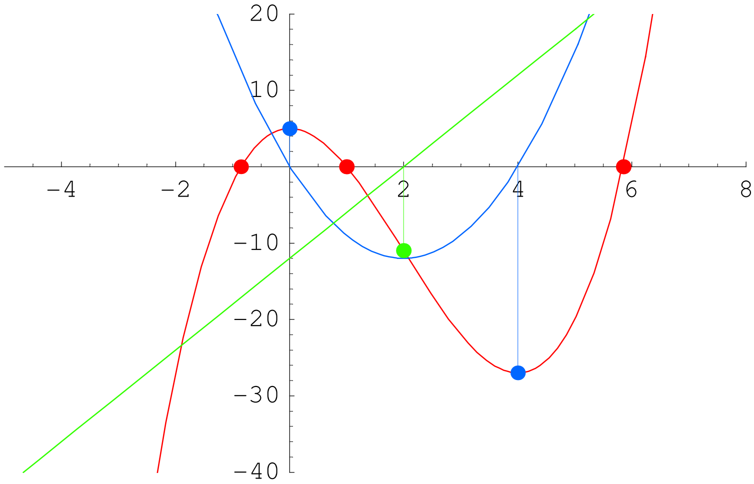
{0, 5}
{4, -27}

```
(wend = x /. Solve[f''[x] == 0, x]; wend = Map[{#, f[#]} &, wend]) // ColumnForm
```

{2, -11}

Zur Veranschaulichung ein Plot (rot: f und Nullstellen, blau: f' und Extrema, grün: f'' und Wendepunkt)

```
range = {{-5, 8}, {-40, 20}};
pl1 = Plot[ {f[x], f'[x], f''[x]}, {x, -5, 10}, PlotRange -> range,
   PlotStyle -> {Hue[1.0], Hue[0.6], Hue[0.3]}, DisplayFunction → Identity];
Needs["Graphics`MultipleListPlot`"];
pl2 =
  MultipleListPlot[nst, ext, wend, PlotRange -> range, DisplayFunction → Identity,
   SymbolShape → Stem, SymbolStyle -> {Hue[1.0], Hue[0.6], Hue[0.3]}];
Show[pl1, pl2, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



Bestimme die Nullstellen der Funktion `f[x] := x^2 + 8`.

```
f[x_] := x^2 + 8;
sol = Solve[f[x] == 0, x]
```

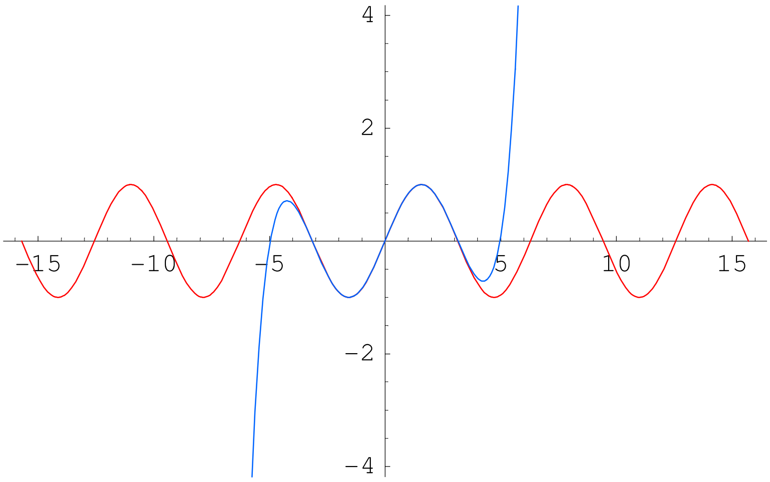
```
{{x → -2 ⅈ √2}, {x → 2 ⅈ √2}}
```

Es gibt nur komplexe Lösungen.

Wie lautet die Tayler Entwicklung von Sin[x] bei x=0 bis zur Ordnung 10?

```
f[x_] = Sin[x];
fs[x_] = Chop[ Normal[ Series[ f[x], {x, 0., 10}] ] ];
```

```
Plot[{f[x], fs[x]}, {x, -5 π, 5 π}, PlotStyle → {Hue[1.0], Hue[0.6]}];
```



Algebra

Ist 347 eine Primzahl? Nenne alle Primzahlen bis 400.

```
PrimeQ[347]
```

```
True
```

```
Select[ Table[i, {i, 1, 400}], PrimeQ ]
```

```
{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,
 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149,
 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227,
 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307,
 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397}
```

Zerlege die Zahl 34398 in ihre Primfaktoren

```
FactorInteger[34398]
```

```
{{2, 1}, {3, 3}, {7, 2}, {13, 1}}
```

Test

$2\ 3^3\ 7^2\ 13$

```
34398
```

Was ist der grösste gemeinsame Teiler (ggT) von 39 und 18?

```
GCD[39, 18]
```

```
3
```

Was ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von 15 und 25?

```
LCM[15, 25]
```

```
75
```

Berechne $\sum_{i=1}^{N} i^2$, $\sum_{i=1}^{N} (i-2)$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^5}$ und $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i!}$

$\left\{\sum_{i=1}^{N} i^2, \sum_{i=1}^{N} (i-2), \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^5}, \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i!}\right\}$ // ColumnForm

$\frac{1}{6} N (1+N) (1+2N)$

$-2N + \frac{1}{2} N (1+N)$

$\frac{\pi^4}{90}$

Zeta[5]

$-1 + \frac{e\,(1+N)\,\mathrm{Gamma}[1+N,1]}{\mathrm{Gamma}[2+N]}$

Was ergibt die Ausmultiplikation von $(2+4x^2)^2 (x-1)^3$?

```
(2 + 4 x^2)^2 (x - 1)^3 // Expand
```

$-4 + 12x - 28x^2 + 52x^3 - 64x^4 + 64x^5 - 48x^6 + 16x^7$

Faktorisiere $4 - 8x + 4x^2 + 16x^3 - 32x^4 + 16x^5 + 16x^6 - 32x^7 + 16x^8$

```
4 - 8 x + 4 x^2 + 16 x^3 - 32 x^4 + 16 x^5 + 16 x^6 - 32 x^7 + 16 x^8 // Factor
```

$4(-1+x)^2 (1+2x^3)^2$

Expandiere den trigonometrischen Ausdruck Sin[2 x] Cos[2 y] in Summe von Termen

```
Sin[2 x] Cos[2 y] // TrigExpand
```

$2\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Cos}[y]^2\,\mathrm{Sin}[x] - 2\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{Sin}[y]^2$

Vereinfache den Ausdruck $\mathrm{Sin}[x]^2 + \mathrm{Cos}[x]^2$

```
Sin[x]^2 + Cos[x]^2 // Simplify
```

1

Matrix mal Vektor

Generiere die Matrix und den Vektor

```
SeedRandom[1]; rand := Random[Integer, {0, 10}];
(matr = Table[rand, {2}, {3}]) // MatrixForm
(vect = Table[rand, {3}]) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Lösung der Aufgabe

```
matr.vect // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 142 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Für eine Matrix berechne die Determinante, quadriere jedes Element der Matrix und invertiere das Resultat.

Generiere die Input Matrix

```
SeedRandom[2]; rand := Random[Integer, {0, 10}];
(matr = Table[rand, {3}, {3}]) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \\ 4 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung der Aufgabe

```
Det[matr]
```

-380

```
(matrQuadr = Map[#^2 &, matr, {2}]) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 81 & 9 & 4 \\ 0 & 49 & 81 \\ 16 & 100 & 36 \end{pmatrix}$$

```
(Inverse[matrQuadr]) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{396}{31543} & -\frac{19}{126172} & -\frac{533}{504688} \\ -\frac{81}{31543} & -\frac{713}{126172} & \frac{6561}{504688} \\ \frac{49}{31543} & \frac{1989}{126172} & -\frac{3969}{504688} \end{pmatrix}$$

Berechne die Lösung des Gleichungssystems Ax=b

Generiere Matrix A und den Vektor b

```
SeedRandom[3]; rand := Random[Integer, {0, 10}];
(A = Table[rand, {2}, {2}]) // MatrixForm
(b = Table[rand, {2}]) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösung der Aufgabe

```
LinearSolve[A, b]
```

$\{-\frac{3}{4}, \frac{19}{4}\}$

Statistik

Gib die Binomialkoeffizienten für n=8 und alle k an.

```
Table[ Binomial[8, k], {k, 0, 8}]
```

```
{1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1}
```

Berechne die ersten 15 Primzahlen und lege eine Fitfunktion (Polynom 2-ten Grades) sowie ein Interpolationspolynom 2-ten Grades durch diese Datenpunkte.

```
(* erzeuge die Liste mit den ersten len Primzahlen *)
prims = (len = 15; Table[Prime[i], {i, len}])
```

```
{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47}
```

```
(* berechne die Fitfunktion für die gegebenen Basisfunktionen *)
fitFunc = Fit[prims, {1, x, x^2}, x]
```

$-1.24835 + 1.95173\, x + 0.0907401\, x^2$

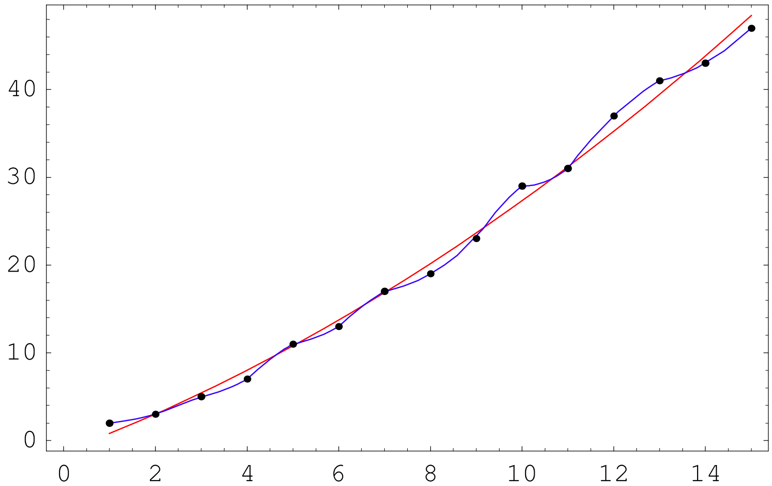
```
(* berechne das Interpolationspolynom *)
interFunc = Interpolation[prims, InterpolationOrder → 2]
```

```
InterpolatingFunction[{{1, 15}}, <>]
```

```
(* berechne die Punkte in (x,y) Darstellung *)
pts = Transpose[{Range[len], prims}]
```

```
{{1, 2}, {2, 3}, {3, 5}, {4, 7}, {5, 11}, {6, 13}, {7, 17}, {8, 19},
 {9, 23}, {10, 29}, {11, 31}, {12, 37}, {13, 41}, {14, 43}, {15, 47}}
```

```
(* Plot der Kurven und Punkte *)
Plot[{fitFunc, interFunc[x]}, {x, 1, len}, PlotStyle -> {Hue[1], Hue[0.7]},
  Epilog -> {PointSize[0.01], Point /@ pts}, Frame -> True];
```



Berechne das Pascal'sche Dreieck bis zur 8-ten Potenz und stelle es graphisch dar.

```
rows = 8;
DisplayForm[GridBox[
  (PadLeft[Rest[Flatten[({"", #1} &) /@ #1]], 2 rows + 1, "", rows - Length[#1] + 1] &) /@
   Table[Binomial[n, m], {n, 0, rows}, {m, 0, n}]]]
```

```
                1
             1     1
          1     2     1
       1     3     3     1
    1     4     6     4     1
  1    5    10    10    5    1
 1   6    15    20    15    6   1
1   7   21    35    35    21   7   1
1  8  28    56    70    56    28  8  1
```

Berechne den Mittelwert, den Median und die Standardabweichung der folgenden Datenreihe

Generierung der Daten

```
Clear[data]; SeedRandom[1]; rand := Random[Integer, {1, 100}];
data = Table[rand, {20}]
```

```
{60, 42, 22, 1, 63, 44, 81, 19, 91, 62, 95, 45, 24, 15, 90, 77, 35, 41, 58, 10}
```

Lösung der Aufgabe

```
Clear[res, i]; res = {};
Do[AppendTo[res, {Mean, Median, StandardDeviation}[[i]][data]], {i, 3}];
res // N
```

```
{48.75, 44.5, 28.5802}
```

Mehr Informationen können einfach mit folgendem Report erhalten werden:

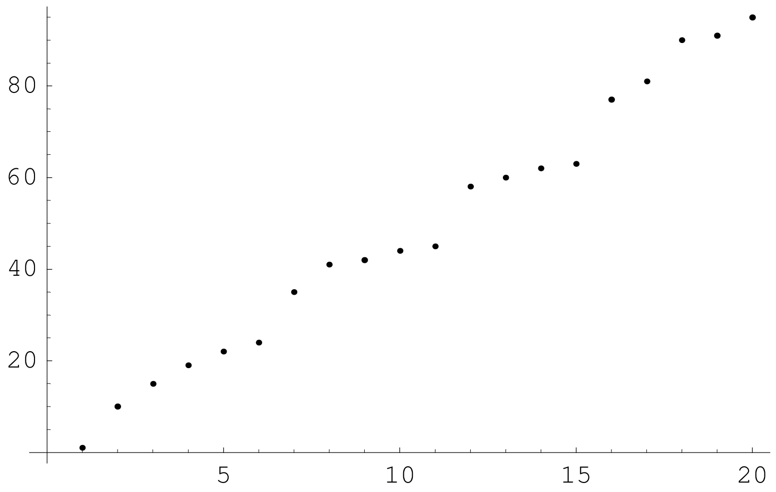
```
Needs["Statistics`DescriptiveStatistics`"];
LocationReport[data] // N
```

```
{Mean → 48.75, HarmonicMean → 12.8865, Median → 44.5}
```

```
DispersionReport[data] // N
```

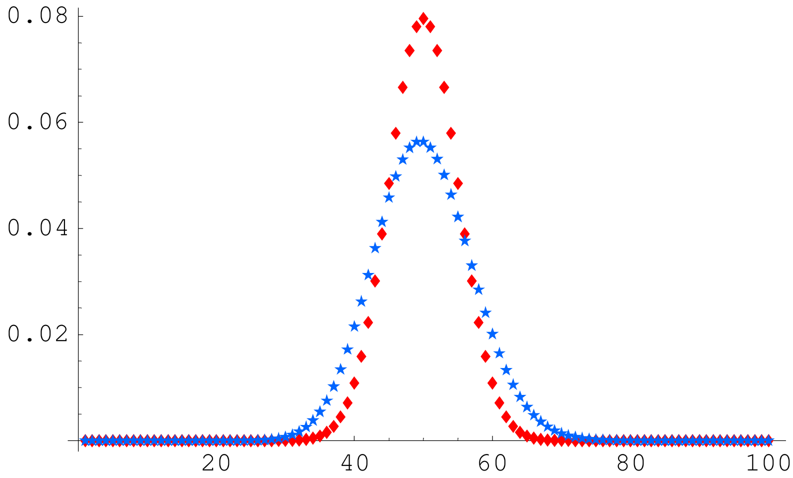
```
{Variance → 816.829, StandardDeviation → 28.5802, SampleRange → 94.,
 MeanDeviation → 23.825, MedianDeviation → 21.5, QuartileDeviation → 23.5}
```

```
ListPlot[Sort[data]];
```



Vergleiche die binomiale Verteilung mit der Poisson Verteilung

```
Needs["Statistics`DiscreteDistributions`"];
Needs["Graphics`MultipleListPlot`"];
MultipleListPlot[ {
   Table[ PDF[BinomialDistribution[100, 0.5], i], {i, 1, 100}],
   Table[ PDF[PoissonDistribution[50], i], {i, 1, 100}]
  }, PlotRange → All, SymbolStyle -> {Hue[1.0], Hue[0.6]}];
```



Führe einen Least Square Fit mit einem Polynom 2-ten Grades für vorgegebene Datenpunkte durch.

Generierung der Daten

```
data = Transpose[
  {Table[i, {i, 10}], SeedRandom[1]; Table[Sin[0.2 i] + 0.1 Random[], {i, 10}]} ]
```

```
{{1, 0.265539}, {2, 0.472538}, {3, 0.642823}, {4, 0.72982}, {5, 0.934925},
 {6, 0.992064}, {7, 1.06129}, {8, 1.09648}, {9, 0.986418}, {10, 0.966861}}
```

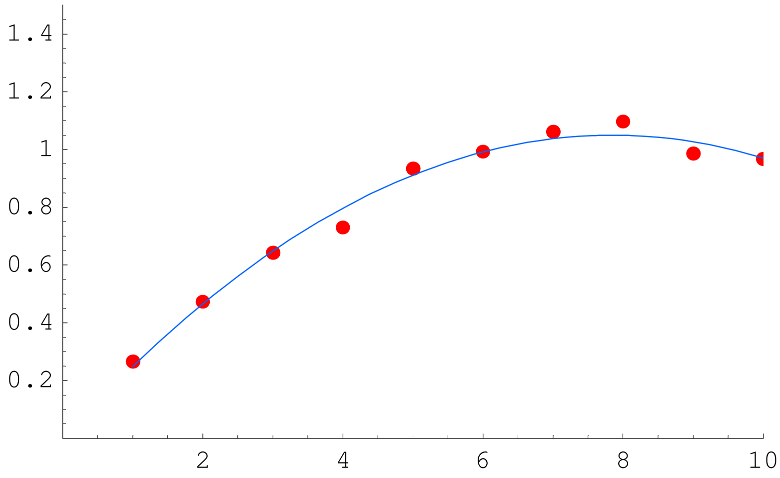
Lösung der Aufgabe

```
fitFunc[x_] = Evaluate[ Fit[ data, {1, x, x^2}, x]]
```

$-0.00177634 + 0.26802\, x - 0.0170768\, x^2$

Plot der Daten

```
Show[
 ListPlot[data, DisplayFunction → Identity,
  PlotStyle -> {Hue[1.0], PointSize[0.02]}],
 Plot[ fitFunc[x] , {x, 1, 10}, DisplayFunction → Identity, PlotStyle -> {Hue[0.6]}],
 DisplayFunction → $DisplayFunction, PlotRange → {{0, 10}, {0, 1.5}}];
```



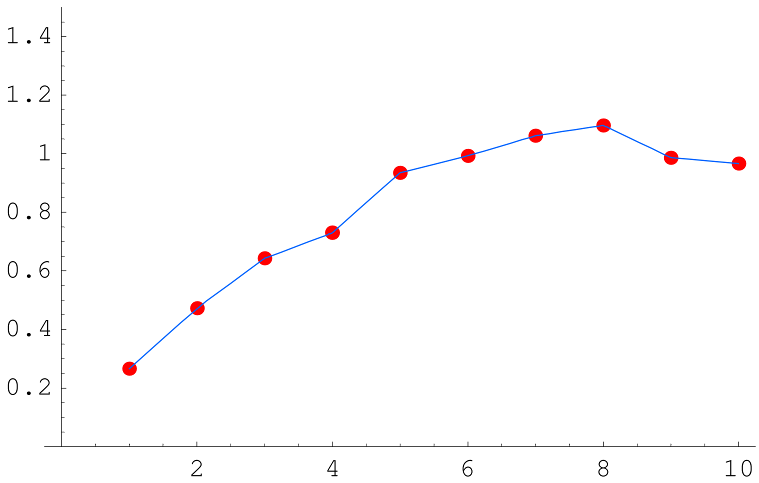
Stelle eine lineare Interpolationsfunktion für gegebene Datenpunkte auf.

```
data = Transpose[
   {Table[i, {i, 10}], SeedRandom[1]; Table[Sin[0.2 i] + 0.1 Random[], {i, 10}]} ];
interpolFunc = Interpolation[ data,  InterpolationOrder → 1]
```

```
InterpolatingFunction[{{1., 10.}}, <>]
```

Plot der Daten

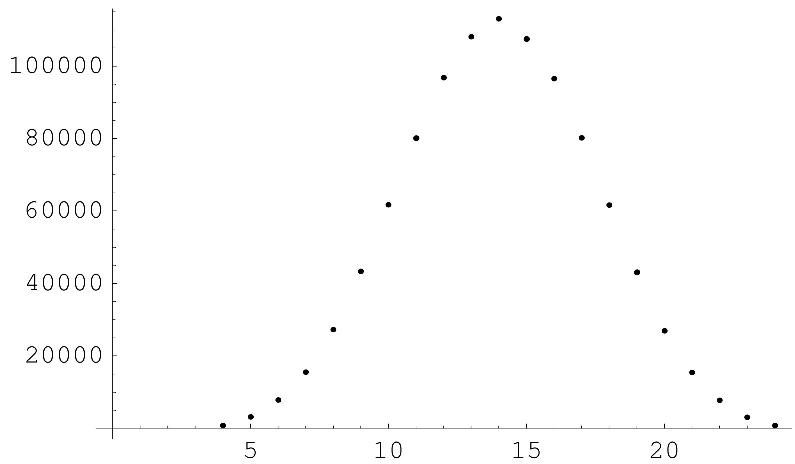
```
Show[
 ListPlot[data, DisplayFunction → Identity,
  PlotStyle -> {Hue[1.0], PointSize[0.02]}],
 Plot[ interpolFunc[x], {x, 1, 10}, DisplayFunction → Identity,
  PlotStyle -> {Hue[0.6]}],
 DisplayFunction → $DisplayFunction, PlotRange → {0, 1.5}];
```



Simuliere ein Würfelexperiment: wie sieht die Verteilung aus, wenn mit 4 Würfeln gewürfelt wird?

```
SeedRandom[1];
res := Total[Table[ Random[Integer, {1, 6}], {4}]];
Needs["Statistics`DataManipulation`"];
data = Frequencies[ Table[res, {1000000}] ];
Needs["Graphics`Graphics`"];
data = Transpose[{data[[All, 2]], data[[All, 1]]}]
ListPlot[ data];
```

```
{{4, 734}, {5, 3142}, {6, 7777}, {7, 15505}, {8, 27178},
 {9, 43327}, {10, 61649}, {11, 80177}, {12, 96747}, {13, 108071},
 {14, 112993}, {15, 107517}, {16, 96457}, {17, 80187}, {18, 61579},
 {19, 43182}, {20, 26908}, {21, 15372}, {22, 7697}, {23, 3072}, {24, 729}}
```



Allgemein

CHF 100 werden für 6 Jahre angelegt. Welche Variante ergibt ein höheres Vermögen:

b) 6 Jahre lang zu 3%

a) zuerst 3 Jahre zu 4%, dann 3 Jahre zu 2%

```
NumberForm[ 1.03^6 100, {5, 3}]
NumberForm[ 1.02^3 1.04^3 100, {5, 3}]
```

```
119.41
```

```
119.37
```

Expandiere die logische Aussage (p||q)&&!(r||s)

```
(p || q) && ! (r || s) // LogicalExpand
```

```
(p && ! r && ! s) || (q && ! r && ! s)
```

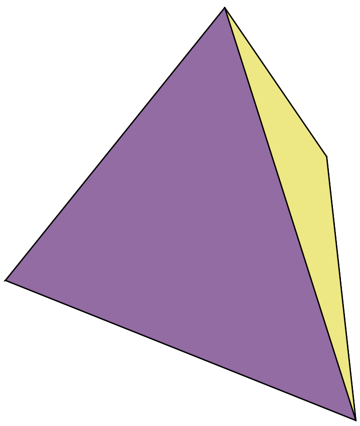
Bestimme die Schnittmenge zweier gegebener Mengen

```
menge1 = {a, bc, d3, aaa};
menge2 = {z, aa, bb, u7, a};
Intersection[menge1, menge2]
```

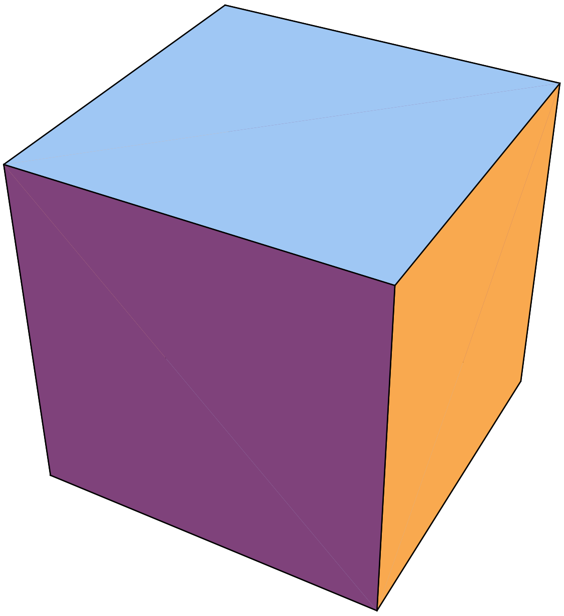
```
{a}
```

Wie sehen die 5 Platonischen Körper aus?

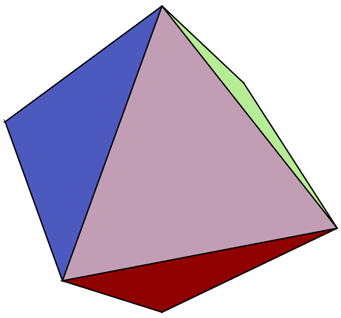
```
Needs["Graphics`Polyhedra`"];
Show[Polyhedron[Tetrahedron, {0, 0, 0}, 0.4], Boxed → False];
```



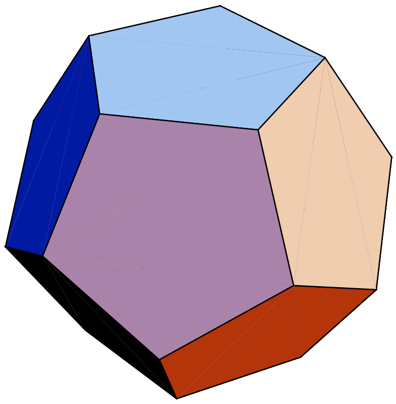
```
Show[Polyhedron[Hexahedron, {0, 0, 0}, 0.4], Boxed → False];
```



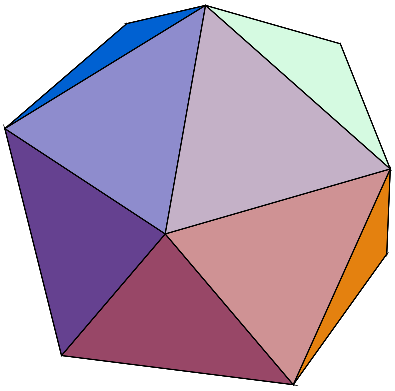
```
Show[Polyhedron[Octahedron, {0, 0, 0}, 0.4], Boxed → False];
```



```
Show[Polyhedron[Dodecahedron, {0, 0, 0}, 0.4], Boxed → False];
```



```
Show[Polyhedron[Icosahedron, {0, 0, 0}, 0.4], Boxed → False];
```



Wie wird die Zahl 31 in der Basis 2 und in der Basis 16 geschrieben?

```
n = 31;
BaseForm[n, 2]
```

11111_2

```
BaseForm[n, 16]
```

$1f_{16}$